

# 一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化（第1報 アルゴリズムの提示と数値計算例）

著者	北山 哲士, 山崎 光悦
雑誌名	日本機械学会論文集 A 編
巻	69
号	684
ページ	1250-1256
発行年	2003-01-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/2266">http://hdl.handle.net/2297/2266</a>

# 一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化

## (第1報 アルゴリズムの提示と数値計算例)

北山哲士 山崎光悦

### Global Optimization by Generalized Random Tunneling Algorithm

#### (1st Report: Proposal of Algorithm and Numerical Examples)

Satoshi KITAYAMA and Koetsu YAMAZAKI

Global optimization method for continuous design variables called as generalized random tunneling algorithm is proposed. Many global optimization methods have been proposed for the unconstrained optimization problem which is to find global minimum subject to the side constraints only. Proposed method is called as “generalized” random tunneling algorithm because this method can treat the inequality (behavior) constraints as well as the side constraints. Generalized random tunneling algorithm consists of three phases. That is, minimization phase, tunneling phase, and constraints phase. The characteristics of mathematical programming and heuristic approaches are included in the proposed method. Without using penalty function to consider the inequality constraints, global optimum which may lie in the boundary of constraints is easily found by generalized random tunneling algorithm. The effectiveness and validity of proposed method have been examined through several numerical examples.

**Key Words :** Optimum Design, Structural Analysis, Finite Element Method, Global Optimization, and Tunneling Algorithm

## 1. 緒言

数理計画法などに代表される目的関数と制約条件の感度を用いた最適化手法を用いる場合、目的関数や制約条件が非線形性かつ多峰性を有するため、得られる解の多くは局所的最適解である場合が多く、初期点に依存することが知られている。全ての制約条件を満足する解候補の中で真の最適解、すなわち大域的最適解を求めることは特に重要なことである。数理計画法の特徴は、ある初期点を実行可能領域に設定し、Kuhn-Tucker条件を満足する点、すなわち最適性を保証する点を探索することである。しかしKuhn-Tucker条件は局所的最適性を保証するが、大域的な最適性までも保証するものではない。このため、得られた解が大域的最適解であるかを判断することは一般には非常に困難である。また大域的最適解を判断するLipshitz条件<sup>(1)</sup>が存在するものの、事前にLipshitzの定数を決定するのは事実上不可能に近い。古くから存在する大域的最適解を求める方法としては、ランダム・サーチやクラスター法<sup>(2),(3),(4)</sup>が挙げられる。ランダム・サーチやクラスター法は設計空間にサンプル点をランダムに配置し、

その点における関数値のみを扱い、大域的最適解を求める方法であるが、得られた解の信頼性がサンプル・サイズに大きく依存するため、サンプル数が少ない場合は大域的最適解を得ることが難しいなど問題点もある。

一方、近年大域的最適解を求める手法としてヒューリスティックな方法が注目されており<sup>(5)</sup>、例えば遺伝的アルゴリズム (GA)<sup>(6)</sup> やシミュレーテッド・アニーリング (SA)<sup>(7),(8)</sup> などが挙げられる。遺伝的アルゴリズムは、生物の進化や適応の過程をコンピュータ上に模倣した最適化手法であり、数理計画法とは異って、多数の初期点を設計領域内にランダムに発生させ、交叉、突然変異などを繰り返しながら、近似的な大域的最適解を求める手法である。一方、シミュレーテッド・アニーリングは金属の焼きなまし現象をコンピュータ上に模倣した方法である。すなわち高い温度から徐々に温度を下げることによりエネルギー準位の低いきれいな結晶を得る方法を模倣した最適化手法で、エネルギーを目的関数と対応させ、温度を徐々に下げることにより探索領域を絞り込み、大域的最適解を求める手法である。これらは後述するような共通した特徴を持っているが、その反面、探索回数を十分大きく取らなければ大域的最適解を見つけられなかったり、最適解を保証

\* 原稿受付 平成14年??月 日

\*<sup>1</sup> 正員、金沢大学工学部 (〒920-8667 金沢市小立野2-40-20)。

するようなKuhn-Tucker条件が存在しないため、得られた解候補が最適解かどうかの検討を行うことができない、また制約条件をペナルティ関数として扱うため制約条件上の最適解を厳密に求めるのが困難であるなどの問題点も存在する。

一方、ヒューリスティックな方法と対極的な方法、すなわち確定的な手法で大域的最適解を求める方法がいくつか提案されており、その中の一つとしてトンネル法<sup>(9),(10)</sup>が挙げられる。これは数理計画法のようにある一つの初期点を設定し、目的関数と制約条件の感度を利用しながら、大域的最適解を求める手法である。トンネル法は最小化ステップとトンネル・ステップと呼ばれる2つのステップを繰り返すことにより大域的最適解を求める。最小化ステップでは局所的最適解を数理計画法などを用いて求め、トンネル・ステップでは最小化ステップで得られた局所解においてトンネル関数を作成し、同じ関数値を持つ別の近傍点を探索する。次にその点を新たな出発点として最小化ステップとトンネル・ステップを交互に繰り返すことにより大域的最適解を求める。またダイナミック・トンネリング・アルゴリズムと呼ばれる方法がYaoにより提案された<sup>(11)</sup>。この方法は最適化問題を力学系に置き換え、時間的发展により大域的最適解を求める手法であり、ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムに基づく大域的最適化手法が提案されている<sup>(12),(13)</sup>。

さらにハイブリッド型の最適化手法がいくつか提案されており、例えばGAとクラスター法を組み合わせた方法<sup>(14)</sup>やSAと数理計画法を組み合わせた方法などがある。前者は設計領域にサンプル点をランダムに配置し、クラスタリングを行い、この結果得られたいくつかの点を初期点としてGAを用いて大域的最適解を求める手法である。一方、後者は徐冷型ランダム・トンネリング・アルゴリズムと呼ばれる<sup>(15)</sup>。この方法は最小化ステップとトンネル・ステップから構成され、最小化ステップでは任意の初期点から勾配法を用いて局所的最適解を探索する。そしてトンネル・ステップにおいて目的関数値を改善するような点をCauchy分布を用いて探索する。この最小化ステップとトンネル・ステップを繰り返すことにより大域的最適解に到達することができる。徐冷型ランダム・トンネリング・アルゴリズムは側面制約のある最適化問題、すなわち事実上の無制約最適化問題に対して適用されているが、多くの最適化問題においては、側面制約条件のみで構成される問題は少なく、不等式（挙動）制約条件を含む最適化問題が多い。

そこで本研究では、側面制約に加え不等式（挙動）

制約条件を含む、より一般的な連続変数の最適化問題における大域的最適解を求める手法を開発することを目的とした。提案する手法は、特にヒューリスティックな方法の特徴の一つであるランダムに探索方向を決めるという点および関数値のみを扱うという点を挙動制約条件の取り扱いに用いることにより大域的最適解を求める方法である。提案する手法は3つのステップから構成され、それぞれ最小化ステップ、トンネル・ステップ、制約ステップと称することにする。これらの3つのステップを繰り返すことにより、大域的最適解を見つける方法である。さらに最小化ステップでは制約条件を陽に扱う方法を用いるため、制約条件上の最適解を容易に見つけることができる。さらにアルゴリズムはKuhn-Tucker条件で探索が終了するように設計されているため、得られる解は最適性が保証される。

本論文の概要を以下に説明する。第2章において数理計画法とヒューリスティックな方法の特徴をまとめ、トンネル法に基づいた提案する手法の概要を示す。第3章では提案する手法の流れとアルゴリズムを示す。そしていくつかの数値計算例を示し、本研究で開発したアルゴリズムの有効性を検討し、最後に結言を述べる。

## 2. 提案手法の概要

2.1 問題設定と手法の特徴 連続変数における最適化問題を次のように定義する。

$$\text{Find } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (1)$$

$$\text{Such as } f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (2)$$

$$\text{Subject to}$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \quad (3)$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x}$ は設計変数ベクトルであり、 $\mathbf{x}^U$ 、 $\mathbf{x}^L$ は設計変数ベクトルの上下限值であり、側面制約と呼ばれる。また $f(\mathbf{x})$ は多峰性を許容する目的関数である。 $g_j(\mathbf{x})$ は挙動制約条件を表し、 $m$ は挙動制約条件の数である。一般に側面制約条件の下で目的関数を最小化するような設計変数ベクトルを見つける問題は事実上、無制約最適化問題であり、本研究で扱う最適化問題は式(4)で表される挙動制約条件を含む、より一般的な有制約最適化問題である。

本研究の基本的な考えは、数理計画法とヒューリスティックな方法の両方の特徴を活用することにより、連続変数の多峰性関数の大域的最適解を求めるものである。数理計画法の特徴をまとめると次のようになる。

(2.1) 探索点は1点。

(2.2) 目的関数や制約条件の感度を利用しながら局所的最適解を探索。

(2.3) Kuhn-Tucker条件で探索を終了。すなわち最適性が保証された点で探索が終了。

一方、ヒューリスティックな方法の特徴は以下の通りである。

(2.4) 確率的な手法。

(2.5) 局所的最適解からの脱出が可能。

(2.6) あらかじめ決められた探索回数で探索を終了。

(2.7) 関数値のみを取扱う。

**2.2 探索法の基本ステップ** 提案する手法は上に示した特徴を組み合わせることにより連続変数の最適化問題における大域的最適解を求める方法である。提案する手法は3つのステップから構成され、それらをそれぞれ最小化ステップ、トンネル・ステップ、制約ステップと称することにする。以下に3つのステップの詳細を述べる。

(1) **最小化ステップ** 初期点を  $x_0$  として数値計画法を用いて最適解  $x_L^*$  を求める。最適性を保証するKuhn-Tucker条件で探索が終了する。しかし目的関数  $f(x)$  に多峰性を許しているため、得られる最適解は局所的最適解であることがある。

(2) **トンネル・ステップ** トンネル・ステップでは以下の式を満足する設計点を求める。

$$f(x) \leq f(x_L^*) \quad (5)$$

ここで

$$x = x_L^* + \delta x \quad (6)$$

である。式(6)の  $\delta x$  はCauchy分布に基づく以下の式を用いて求める。

$$\delta x_i = T \tan(P_i) \quad (7)$$

はじめに各設計変数に対して  $[0, 1]$  の乱数を発生させ、それを  $(-\pi/2, \pi/2)$  に変換し、 $P_i$  とする。Tangent関数を用いることで、局所的最適解  $x_L^*$  から幅広く探索することが可能である。また  $T$  は文献(16)にならい温度と称する。温度が非常に高い場合は、式(5)を満足する局所的最適解から離れた点を探索することができ、徐々に温度を下げることで局所的最適解の近傍を探索することになる。もし式(5)を満足する点があらかじめ決めた最大探索回数の中で発見できなければ、温度を下げることで再び探索する。温度があらかじめ決めた最小温度  $T_{\min}$  以下になった場合は、探索をすべて終了し、得られた解を大域的最適解とする。式(5)を満足する点が見つかった場合は制

約ステップへ行く。

(3) **制約ステップ** 式(5)を満足する点が挙動制約条件を満足しているかどうかを検討するために制約ステップを新たに導入する。制約ステップにおいてもトンネル・ステップと同様に最小温度をあらかじめ決めておく。制約ステップをまとめると以下ようになる。

(a) トンネル・ステップで得られた点すべてが制約条件を満足しているかどうかをチェックする。ここでは制約条件値のみを扱う。もしトンネル・ステップで得られた点すべてが制約条件を満足していれば、得られた点を初期点として最小化ステップへ戻り、再び局所的最適解の探索を行う。(図1)

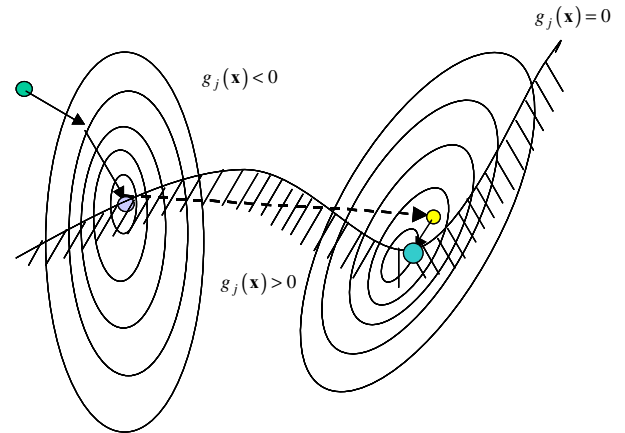


Fig.1 In case of satisfying constraints.

(b) トンネル・ステップで得られた点すべてが制約条件を満足していなければ、温度を徐々に下げることにより制約条件を満足するかどうかを検討する。(図2)

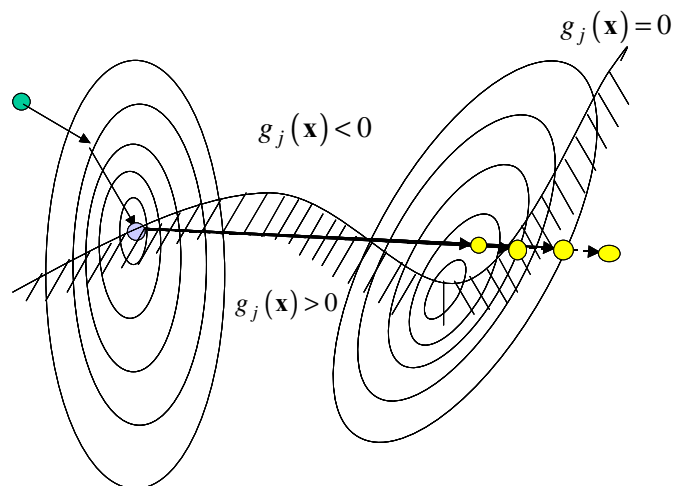


Fig.2 Search process by decreasing temperature.

(c) あらかじめ決めた制約ステップにおける最小温度の範囲で制約条件を満足する点が見つからなければ、トンネル・ステップへ戻り、再び乱数を用いて探索方向をランダムに決め、式(5)を満足し、かつ制約条件を満足するような点の探索を開始する。(図3)

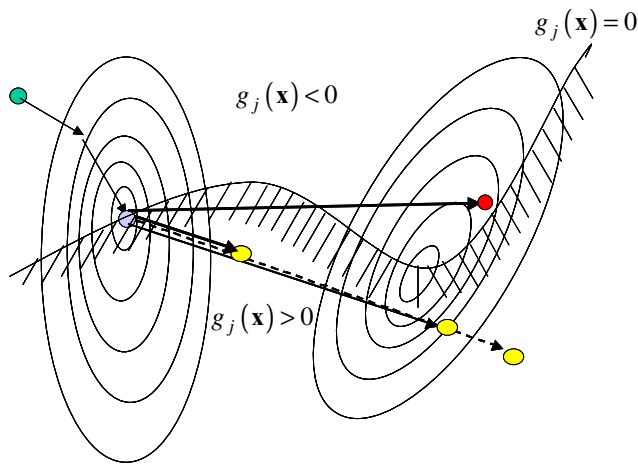


Fig.3 Change of search direction.

### 3. アルゴリズム

提案する手法の流れと，そのアルゴリズムを示す．

必要となる入力データは以下の通りである．

- (3.1) 実行可能領域内における初期点  $x_0$
- (3.2) 初期温度  $T_0$
- (3.3) トンネル・ステップにおける最大探索回数  $it_{max}$
- (3.4) 最小温度  $T_{min}$

#### (1) 最小化ステップ

- (Step1) 実行可能領域内に適当な初期点  $x_0$  を取る．
- (Step2) 数値計画法を用いて，局所的最適解  $x_L^*$  を求める．

#### (2) トンネル・ステップ

(Step3) 初期温度  $T_0$  を設定する．トンネル・ステップおよび制約ステップにおける探索回数  $it, out$  をそれぞれ初期化する．  $k=0$  とする．

(Step4) 各設計変数ごとに  $[0, 1]$  の乱数を発生させ，それを  $(-\pi/2, \pi/2)$  に変換し，  $P_i$  とする．

(Step5) 式 (6), (7) により探索点を決める．

(Step6) 式 (5) を満足する点が見つかった場合，制約ステップへ行く．そうでなければStep7へ行く．

(Step7) トンネルステップにおける探索回数が，あらかじめ決めた最大探索回数  $it_{max}$  を超えた場合はStep8へ．そうでなければ

$$it = it + 1 \quad (8)$$

としてStep4へ戻る．

(Step8)  $k = k + 1$  として，次の式で定める冷却スケジューリングにより，温度を下げる．

$$T = \frac{T}{k+1} \quad (9)$$

(Step9) 温度があらかじめ決めた最小温度  $T_{min}$  よりも大きい場合はStep8で得られた温度のまま，Step4へ戻る．最小温度以下になった場合は，大域的最適解として探索を終了する．

#### (3) 制約ステップ

(Step10) 式 (5) を満足する点がすべての制約条件を満足しているかどうかを検査する．すべての制約条件を満足している場合は，得られた点を初期点として最小化ステップへ戻る．制約条件を1つでも満足していなければStep11へいく．

(Step11) 式 (5) を満足する設計点は制約条件の外にあるため，

$$out = out + 1 \quad (10)$$

として制約ステップにおける探索回数を数え，Step12へ．

(Step12) 次の冷却スケジューリングに従い，温度を下げ，Step13へいく．

$$T = \frac{T}{out+1} \quad (11)$$

(Step13) 温度があらかじめ決めた最小温度  $T_{min}$  よりも大きい場合はStep5へ戻る．そうでない場合はStep3へ戻る．

制約ステップは単に式 (5) を満足するトンネル・ステップで得られた解が制約条件を満足しているかどうかを検査するために導入したステップであり，制約条件値のみを用いて判断する．またアルゴリズムはKuhn-Tucker条件で探索が終了するように設計されており，得られた解は最適性が保証される点に特徴がある．さらに最小化ステップでは制約条件を陽に扱う最適化手法を用いれば，挙動制約条件上の最適解も簡単に見つけることが可能となる．全体のアルゴリズムの流れを図4に示す．

### 4. 数値計算例

数値計算例を通じて，本論文で提案する手法の有効性を検討する．数値計算例では探索過程の可視化のために，2変数関数を，また多変数の例として構造最適化問題を考える．すべての数値計算例において，必要となる初期入力データとして，初期温度を  $T_0 = 1.0$ ，トンネル・ステップにおける最大探索回数を  $it_{max} = 20$ ，さらにトンネルステップと制約ステップにおける最小温度を  $T_{min} = 1.0 \times 10^{-5}$  とした．また最小化ステップで必要な最適化手法として逐次二次計画法を用いた．<sup>(13)</sup>

#### 例題4.1 2変数1制約条件の最小化問題

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i) \quad (12)$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0 \quad (13)$$

$$-5 \leq x \leq 5 \quad (14)$$

初期点Aを  $(x_1, x_2)^T = (1.0, 0.5)^T$  として大域的最適解の探

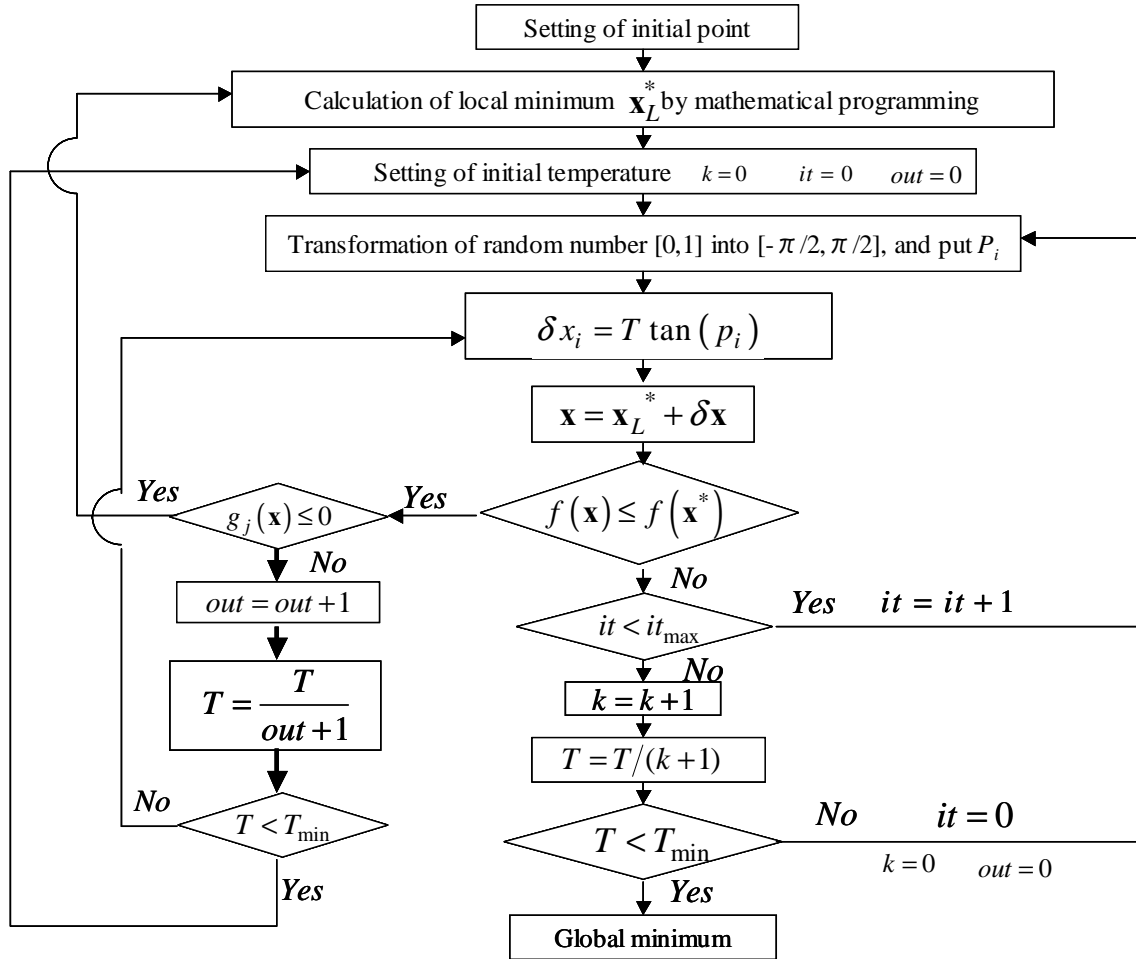


Fig.4 Algorithm of proposed method

索を行う．最小化ステップで局所的最適解  $B(x_1, x_2)^T = (2.119, 2.122)^T$  を得た．そしてトンネルステップにおいてC点を見つけ，この点を初期点として再び最小化ステップにおいて局所的最適解  $D(x_1, x_2)^T = (1.976, -2.256)^T$  を得た．さらにトンネルステップにおいてE点  $(x_1, x_2)^T = (-2.32, -1.60)^T$  を見つけ，最終的に大域的最適解  $F(x_1, x_2)^T = (-2.121, -2.121)^T$  を見つけることができた．探索の様子を図5に示す．

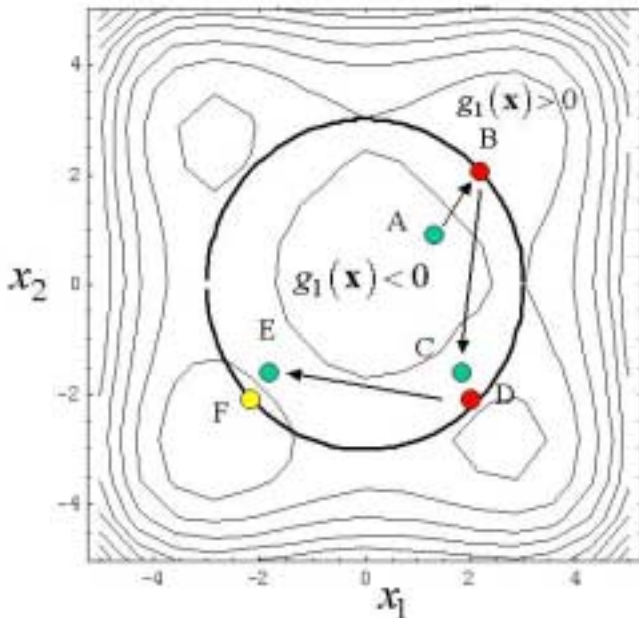


Fig.5 Search process and global optimum.

#### 例題4.2 2変数6制約条件問題の最小化問題<sup>(17)</sup>

$$f(x) = x_1 + 10x_2 \rightarrow \min \quad (15)$$

$$g_1(x) = -(x_1 - 2)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (16)$$

$$g_2(x) = -(x_1 - 3)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (17)$$

$$g_3(x) = -(x_1 - 4)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (18)$$

$$g_4(x) = -(x_1 - 5)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (19)$$

$$g_5(x) = -(x_1 - 6)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (20)$$

$$g_6(x) = -(x_1 - 7)^2 - x_2 + 3 \leq 0 \quad (21)$$

$$2 \leq x \leq 7 \quad (22)$$

初期点Aを  $(x_1, x_2)^T = (6.0, 5.0)^T$  としたときの探索過程と大域的最適解を図6に示す．また図6は式(16)から式

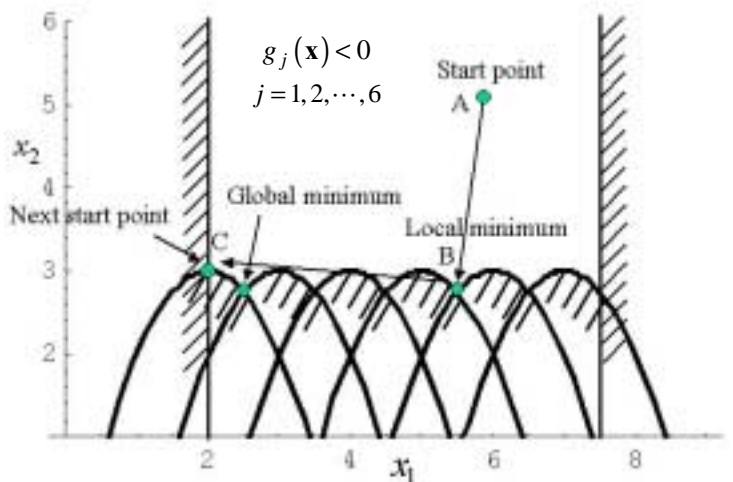


Fig.6 Search process and global optimum.

(22)の制約面を示している。

図6に示す通り，最小化ステップで一度局所的最適解である点 $B(x_1, x_2)^T = (5.5, 2.75)^T$ へ行く．このときの目的関数値は $f = 33$ である．そして式(5)を満足する点 $C(x_1, x_2)^T = (2.0, 3.0)^T$ を見つけている．この点における目的関数値は $f = 32$ である．そしてこの点を初期点として最終的に大域的最適解 $(x_1, x_2)^T = (2.5, 2.75)^T$ を得ている．なお大域的最適解における目的関数値は $f^* = 30$ である．

**例題4.3 トラス構造の最適位相問題<sup>(17)</sup>** 変位制約条件の下でトラス構造物の体積を最小にするような最適位相を求める．位相最適化問題は一般に複数の極小値を持つ多峰性問題である．変位制約条件の下での体積最小化問題を定式化すると

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n A_i L_i \rightarrow \min \quad (23)$$

$$g_j(\mathbf{A}) = u_k(\mathbf{A})/u_a(\mathbf{A}) - 1 \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, m \quad (24)$$

$$A_{i,\min} \leq A_i \leq A_{i,\max} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (25)$$

となる．ここで $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$ は設計変数である各部材の断面積， $f(\mathbf{A})$ はトラスの総体積， $g_j(\mathbf{A})$ は第 $k$ 番目の変位 $u_k$ に関する挙動制約条件であり， $u_a$ は許容変位の値である．また式(24)の $A_{i,\max}$ と $A_{i,\min}$ はそれぞれ各部材の断面積の上下限值であり側面制約条件である．

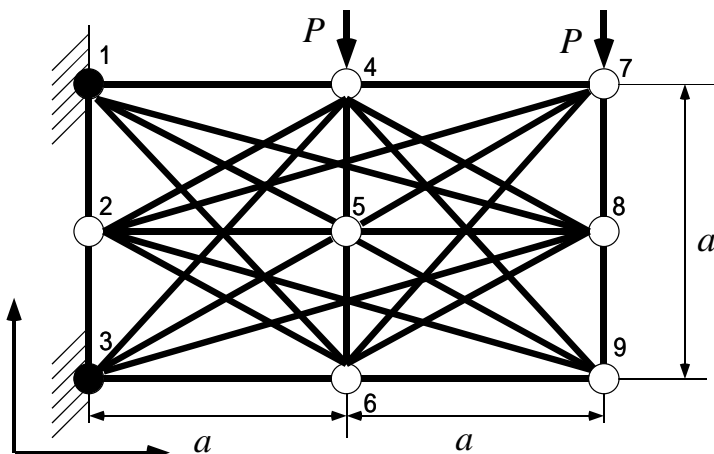


Fig.7 Analysis model

解析対象モデルは図7に示すような9節点28部材で構成される．節点1と3の水平鉛直方向の変位が固定されており，節点4と7に荷重 $P = 1.00 \times 10^3 [N]$ が作用するものとする．節点間の距離を $a = 100 [mm]$ とし，変位制約として荷重点の鉛直変位を考え，許容変位値 $u_a$ を $1.50 \times 10^{-2} [mm]$ とし，すべての設計変数の上下限値をそれぞれ $A_{i,\max} = 1.00 \times 10^3 [mm^2]$ と $A_{i,\min} = 1.00 [mm^2]$ とする．なおヤング率を $E = 210 [GPa]$ とした．

探索初期値をすべて $A_0 = 1.00 \times 10^2 [mm^2]$ として，ト

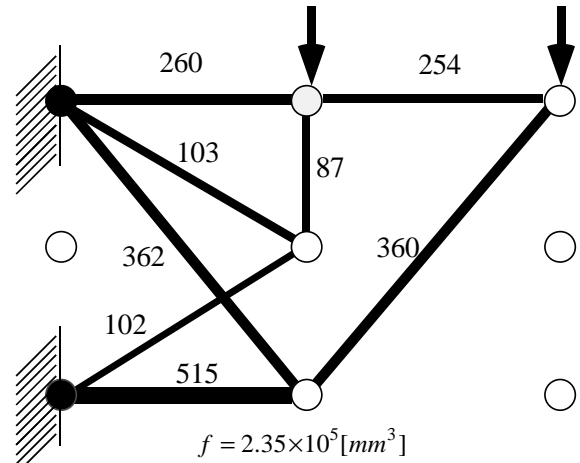


Fig.8 Optimum topology at global minimum

Table 1 Nodal displacement

Node	Horizontal [mm]	Vertical [mm]
4	$1.85 \times 10^{-3}$	$-1.50 \times 10^{-2}$
7	$3.71 \times 10^{-3}$	$-1.50 \times 10^{-2}$

ラス構造の最適位相を求めた．得られた最適位相を断面積とともに図8に示し，そのときの荷重点における節点の変位を表1に示す．図中の数値は断面積の値を示す．このときの目的関数値は $2.35 \times 10^5 [mm^3]$ である．図8において表示されていない部材に関しては，設計変数が側面制約の下限值 $A_i = 1.00 [mm^2]$ となったため省略して示している．さらに探索過程で求めた局所解におけるトラス構造の位相をそのときの目的関数値と併せて図9(a), (b)に示す．図9では，断面積が $10.0 [mm^2]$ 未満のものは無視できるものとして表示している．

なお探索初期点をすべて $A_0 = 3.00 \times 10^2 [mm^2]$ ， $A_0 = 5.00 \times 10^2 [mm^2]$ と変えて探索した結果，局所解として得られた位相は異なるものの，最終的に図8に示す最適位相が得られた．

同様な問題が坂本・尾田によってGAと最適性基準法を併用した方法でも解かれており<sup>(19)</sup>，論文中的数値から単純に計算すると，約40世代で大域的最適解を見つけており，関数評価回数は約2800回であった．一方，提案する手法では初期値をすべて $A_0 = 1.00 \times 10^2 [mm^2]$

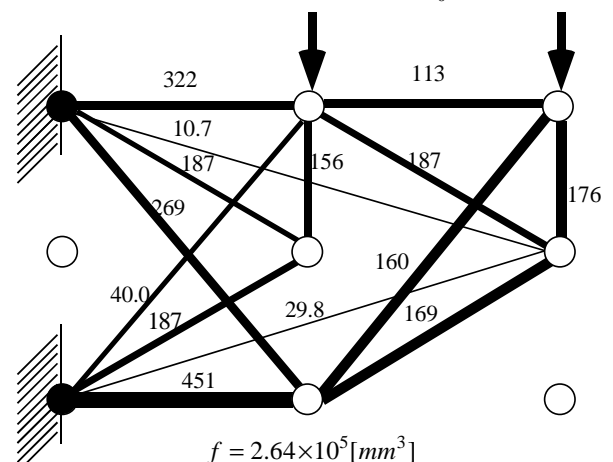


Fig.9(a) Optimum topology at local minimum



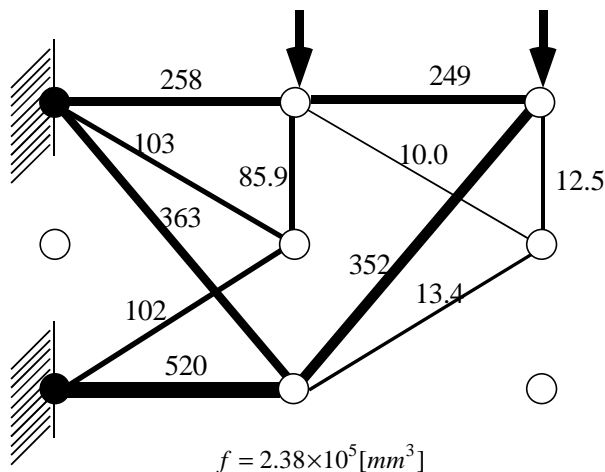


Fig.9(b) Optimum topology at local minimum

とした場合を20回試行した結果，すべての試行で大域的最適解を見つけており，最高で3回，最悪でも4回の探索回数で見ついている．また関数評価回数の平均は1051回であった．

## 5. 結言

本研究では，トンネル法にヒューリスティックな方法の特徴の一つである確率的な探索過程を組み込んだ大域的最適解探索法を提案し，以下の結論を得た．

- 1) 挙動制約条件を含む最適化問題の大域的最適解を求める手法を提案した．その手法は3つのステップ，すなわち最小化ステップ，トンネル・ステップ，制約ステップから構成される方法である．最小化ステップでは制約条件を陽に扱う方法を用いているため，制約条件上の最適解が容易に求まる．また最終的に得られる最適解に対して最適性が保証されている点に特徴がある．
- 2) 制約ステップでは制約条件値のみを扱うステップであり，制約条件の感度を必要とせず，計算も簡単に行えるステップである．
- 3) 数値計算例を通じて提案する手法の有効性を確認した．

## 謝辞

本研究を遂行するにあたり，的確なご助言を頂いた早稲田大学理工学部山川宏教授に謝意を表する．

## 参考文献

- (1) 例えば藤田宏・今野浩・田邊国土，最適化法，(1994)，岩波書店．
- (2) S.S.Rao, *Engineering Optimization: Theory and Application*, (1996), Wiley Interscience.
- (3) A.H.G.Rinnooy Kan, G.T.Timmer, *Stochastic Global Optimization Methods Part : Clustering*

*methods*, Mathematical Programming, **39**, (1987), pp.27-59.

(4) J.S.Arora, O.A.Elwakeil and A.I.Chahande, *Global optimization method for engineering applications: a review*, Structural Optimizaiton, **9**-3, (1995), pp.137-159.

(5) 安田恵一郎，進化論的計算手法とメタヒューリスティックス，電学論C，**122**-3，(2002)，pp.320-323.

(6) 例えば遺伝的アルゴリズム，坂和正敏・田中雅博，(1997)，朝倉書店．

(7) Kirkpatrick, Gellat, and Vecchi, *Optimization by Simulated Annealing*, Science, **220**, (1983), pp.671-680.

(8) 中野良平，シミュレーテッド・アニーリング，人口知能学会誌，**9**-3，(1994)，pp.365-372．

(9) Levy and Montolvo, *The tunneling algorithm for the global minimization of functions*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., **6**-1, (1985), pp.15-29.

(10) Levy and Gomez, *Numerical Optimization 1984*, (1985), pp.213-244, SIAM.

(11) Y.Yao, *Dynamic Tunneling Algorithm for Global Optimization*, IEEE Trans., **19**-5, (1989), pp.1222-1230.

(12) 村野，藤田ほか2名，多軌道型ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムの構成，電学論C，**118**-4，(1998)，pp.578-584．

(13) 茂中，藤田ほか2名，ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムの有制約大域的最適化問題への適用，電学論C，**118**-11，(1998)，pp.1674-1675．

(14) 森谷・天谷・青木，GAとクラスタリングを併用した最適化手法，機論A，**60**-580，pp.2903-2908．

(15) 島，徐冷型ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化，計測自動制御学会論文集，**29**-11，(1993)，pp.1342-1351．

(16) H.Szu and R.Hartley, *Fast Simulate Annealing*, Physics Letters A, Vol.122-3,4, (1987)，pp.157-162.

(17) Papalambros and Wilde, *PRINCIPLE OF OPTIMAL DESIGN*, (2000), CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

(18) 山崎光悦，トンネル法によるトラス構造形態の最適化，機講論，No.940-10，(1994)，pp.339-341.

(19) 坂本・尾田，遺伝的アルゴリズムを利用した最適トラス形態決定法，機論A，**59**-562，pp.1568-1573.